Serie di potenze

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Data $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, la *serie di potenze* di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Alla serie si associa il raggio di convergenza R:

$$\underline{\text{se}}\ \exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

$$\underline{\text{allora}}\ R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0, \\ \frac{1}{l} & \text{se } 0 < l < +\infty, \\ 0 & \text{se } l = +\infty. \end{cases}$$

cioè R è il “reciproco generalizzato” di l.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$$

1. converge puntualmente & assolutamente su $(x_0 - R, x_0 + R)$
2. non converge in $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$ (cioè non converge per $|x - x_0| > R$)
3. può (oppure no) convergere in $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$
4. converge totalmente e dunque uniformemente su $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $0 < r < R$
5. teor. Abel: se converge in $x = x_0 + R$, allora converge uniformem. in $[x_0, x_0 + R]$, e idem per $x = x_0 - R$

Osservazione. Se $a_n \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

$\Rightarrow$ equivalente calcolare il raggio di convergenza con criterio rapporto asintotico, quindi

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$\Downarrow$$

R “reciproco generalizzato” di l